Le diamant Aztèque et son cercle arctique

Sofia Tarricone

Institut de Physique Théorique, CEA Paris-Saclay

π-Day

CPES Lycée Louis Le Grand, Paris

14/03/2024

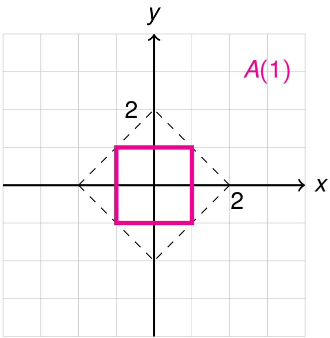
Outline

Le diamant Aztèque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$A(n)$, le diamant Aztèque de taille n, est la figure géometrique du plan obtenue en considérant tout les carrés $[a, a+1] \times [b, b+1]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ contenus dans le diamant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ t.q: } |x| + |y| \leq n + 1\}.$$



Remarque Le nombre de carrés dans $A(n)$ est donné par

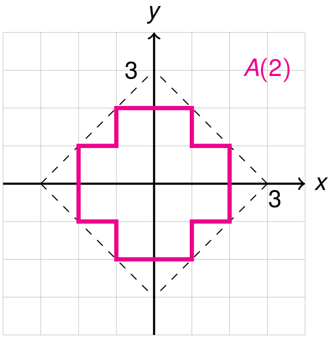
$$4 \sum_{k=1}^{n} k = 2n(n+1).$$

Le diamant Aztèque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$A(n)$, le diamant Aztèque de taille n, est la figure géometrique du plan obtenue en considérant tout les carrés $[a, a+1] \times [b, b+1]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ contenus dans le diamant

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q: } |x| + |y| \leq n+1\}.$$

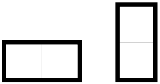


Remarque Le nombre de carrés dans $A(n)$ est donné par

$$4 \sum_{k=1}^{n} k = 2n(n+1).$$

Les pavages

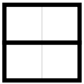
Nous considérons des dominos rectangulaires de tailles 2×1 ou 1×2

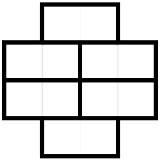


Un pavage de $A(n)$ est un ensemble de tels dominos tel que :

- $A(n)$ est entièrement recouvert par les dominos;
- les dominos ne se superposent pas.

Exemple Les pavages horizontaux pour $n = 1$ et 2.





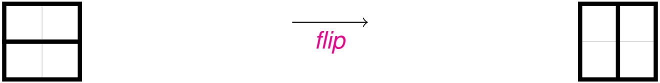
Nous définissons $a_n = \#\{\text{pavages de } A(n)\}$.

Problème de combinatoire enumerative

Pour chaque n, combien vaut a_n ?

Les premiers calculs

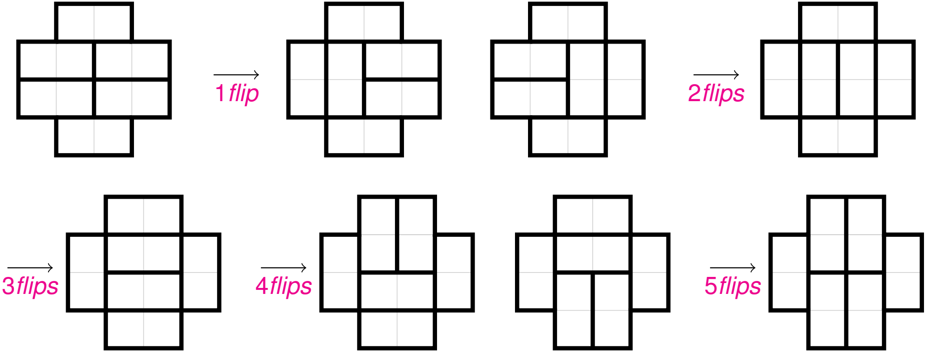
Pour $n = 1$ nous avons exactement 2 pavages possibles, $a_1 = 2$.



Les premiers calculs

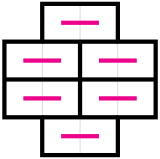
Pour $n = 1$ nous avons exactement 2 pavages possibles, $a_1 = 2$.

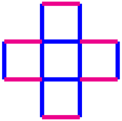
Pour $n = 2$ nous avons exactement 8 pavages possibles, $a_2 = 8 = 2^3$.



Lien avec les modèles de dimers

Les pavages de $A(n)$ sont en bijection avec les couplages parfaits du graphe planaire associé (par dualité) à $A(n)$.





L'ensemble des couplages parfaits d'un graphe donné est appelé modèle de dimers. Le modèle de dimers pour un sous-graphe rectangulaire de $\mathbb{Z}^2$ est connu depuis les travaux de Kenyon des années '60.

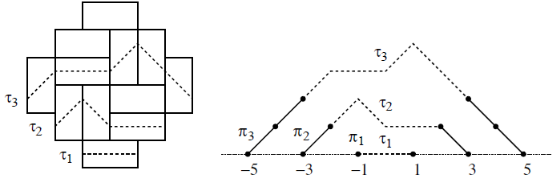
Remarque Les modèles de dimers sont considérés comme des modèles de physique statistique, ils modélisent la répartition de molécules di-atomiques à la surface d'un cristal.

Bijection avec les chemins de Schroder non-intersectant

En 2004 Eu et Fu ont prouvé que les pavages de $A(n)$ sont en bijection avec l'ensemble des n-uplets $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ de grand chemins de Schroder tels que

- pour tout $i \neq j$, π_i et π_j ne s'intersectent pas;
- Pour $i = 1, \ldots, n$ chaque

$$\pi_i \text{ va dès } (-2i+1, 0) \text{ à } (2i-1, 0).$$



From *A simple proof of the Aztec diamand theorem* by Eu et Fu.

Outline

Le résultat de Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp

Pour $x, q \in \mathbb{R}_+$ des paramètres, nous avons la fonction qui compte les pavages raffinés

$$\mathrm{AD}(n; x, q) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} \prod_{d \in P} x^{v(d)} q^{r(d)},$$

où pour chaque domino d dans un pavage de $A(n)$, nous définissons les fonctions

$$v(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0, & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \qquad r(d) = \begin{cases} (-1)^{i+j+n}(i+n+1), & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0 \text{ si } d \text{ est horizontale.} \end{cases}$$

Remarque $\mathrm{AD}(n; x = 1, q = 1) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} 1 = a_n$.

Théorème (Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, 1992)

Pour tout n, la fonction $AD(n; x, q)$ est donnée par

$$AD(n; x, q) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + xq^{2k+1})^{n-k}$$

Corollaire Pour tout n, le nombre de pavages de $A(n)$ correspond à

$$\boxed{a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Le résultat de Elkies, Kuperberg, Larsen et Propp

Pour $x, q \in \mathbb{R}_+$ des paramètres, nous avons la fonction qui compte les pavages raffinés

$$\mathrm{AD}(n; x, q) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} \prod_{d \in P} x^{v(d)} q^{r(d)},$$

où pour chaque domino d dans un pavage de $A(n)$, nous définissons les fonctions

$$v(d) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0, & \text{si } d \text{ est horizontale.} \end{cases} \qquad r(d) = \begin{cases} (-1)^{i+j+n}(i+n+1), & \text{si } d \text{ est verticale,} \\ 0 \text{ si } d \text{ est horizontale.} \end{cases}$$

Remarque $\mathrm{AD}(n; x = 1, q = 1) = \sum_{P \text{ pav. } A(n)} 1 = a_n$.

Théorème (Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, 1992)

Pour tout n, la fonction $AD(n; x, q)$ *est donnée par*

$$AD(n; x, q) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + xq^{2k+1})^{n-k}$$

Corollaire Pour tout n, le nombre de pavages de $A(n)$ correspond à

$$\boxed{a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Idée de la preuve

Lemme Les fonctions qui comptent les pavages raffinés de taille n et $n-1$ sont liés par la relation

$$\mathrm{AD}(n; x, q) = (1 + xq)^n \mathrm{AD}(n-1; xq^2, q).$$

$$\downarrow$$

Par induction sur n, en utilisant cette relation, la formule explicite pour $\mathrm{AD}(n; x, q)$ est ensuite prouvée (voir atelier).

Remarque Pour $x = q = 1$ nous avons que

$$a_n = 2^n a_{n-1}.$$

L'idée fondamentale derrière cette formule est de pouvoir construire de façon recursive des pavages de taille n à partir d'un pavage de taille $n-1$.

Algorithme de Shuffling

Pour un pavage donné de $A(n-1)$, nous construisons un pavage de $A(n)$.

- A partir du point au milieu du sommet de $A(n-1)$, nous marquons tous les points du réseau à distance paire de celui ci.
- Sur chaque domino, nous posons une flèche, en direction du point marqué du réseau qui tombe au mileu de son coté de taille 2.
- Nous regardons tout les carrés de taille 2×2 dans $A(n-1)$: si un est composé de deux dominos ayant des flèches en direction du meme point nous éliminons les dominos, ce sont des *mauvais* paires.
- Nous mouvons simultanéamont en direction de leur flèche tout les autres dominos de un.

!!! Les dominos sont ainsi placés à l'intérieure de $A(n)$. La place vide laissée est composée de

$$2n(n+1) - 2n(n-1) = 4n$$

carrés disposés en n carrés de taille 2×2.

- Nous rémplissons ces derniers avec *n bon* paires de dominos, en prénant une paire verticale ou horizontale avec probabilité $1/2$.

https://fedimser.github.io/adt/adt.html

Outline

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

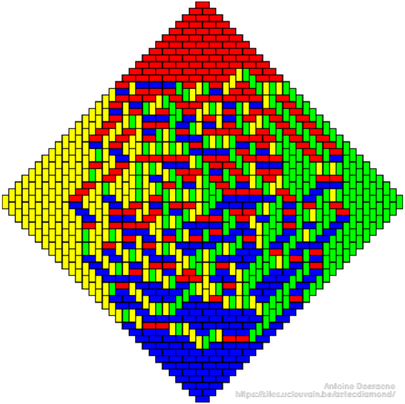
$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



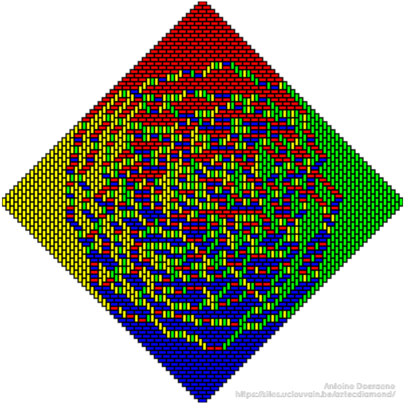
Images générées par Antoine Doeraene `https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html`

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



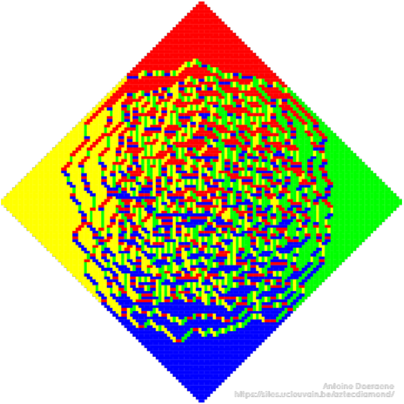
Images générées par Antoine Doeraene `https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html`

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



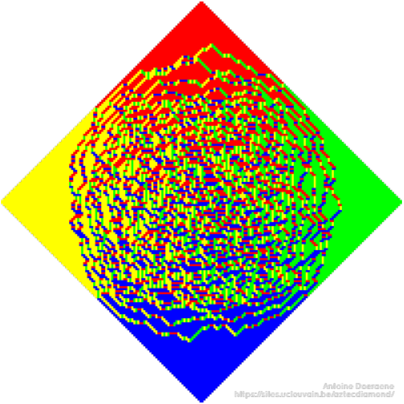
Images générées par Antoine Doeraene `https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html`

Génération aléatoire de pavages de grande taille

Remarque L'algorithme de shuffling permet d'engendrer des pavages aléatoires uniformes, i.e. tels que pour tout n chaque pavage peut apparaître avec probabilité

$$\frac{1}{2^{n(n+1)/2}}.$$

Pourtant, les images que nous obtenions n'ont pas vraiment l'air aléatoire...



Images générées par Antoine Doeraene `https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html`

Le théorème du cercle articque

Le cercle inscrit dans le diamant Aztèque divise

- la zone gelée, donnée par les quatres coins du diamant, dans lesquels il y a un unique type de domino,
- la zone témperée, où tous les types de dominos apparaissent.

Et ce phénomène arrive avec probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Théorème (Jockusch, Propp, Shor, 1995)

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout n assez grand, tous sauf une fraction ϵ des pavages de $A(n)$ aurant une zone témperée dont la frontière reste uniformement à distance ϵn de l'interieur du cercle inscrit.

Merci de votre attention !

Je vous attend à l'atelier...

Références

Articles :

- *Alternating-Sign Matrices and Domino Tilings (Part I-II)* par Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp, `https://arxiv.org/abs/math/9201305`
- *Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem* par Jockusch, Propp, Shor `https://arxiv.org/abs/math/9801068`
- *A simple proof of the Aztec diamond theorem* par Eu, Fu `https://arxiv.org/abs/math/0412041`

Vidéos :

- Cours d'une école de recherche au CIRM *Le diamant Aztèque* par Sylvie Corteel, `https://www.youtube.com/watch?v=xCOXF_AMMow`
- Vidéo de vulgarisation *The ARCTIC CIRCLE THEOREM or Why do physicists play dominoes?* par Mathologer `https://www.youtube.com/watch?v=Yy7Q8IWNfHM`

Codes :

- `https://fedimser.github.io/adt/adt.html`
- `https://sites.uclouvain.be/aztecdiamond/domino-shuffling-implementation.html`